Előismeret: Az első feladat egyismeretlenes elsőfokú paraméteres egyenlet, amelyet minden esetben „”-re rendezünk!

1.Feladat: Oldja meg úgy az egyenletet, hogy annak megoldása negatív legyen!

A.h.: ebből valamint továbbá amelyből innen tényezőnkénti vizsgálattal ugyanazon lehetséges értékeket zárjuk ki, ebből következtetünk arra, hogy a nevezők legkisebb közös többszöröse:

Szorozzunk ezzel a közös nevezővel:

Zárójelbontás után:

Ugyanazon oldalra rendezzük az egynemű tagokat, tehát azokat amelyek „”-et tartalmazzák, kerüljenek egyvalamely oldalra és minden egyéb (ami független konstansnak minősül „”-re nézve), kerüljön a másik oldalra:

A bal oldali egynemű tagokból közvetlen kiemeléssel kiemeljük az „” változót:

Egészítsük ki az A.h. feltételt feltétellel, amelyből adódik, innen osztás után:

A feladat szövege értelmében a megoldásnak negatívnak kell lennie, így a megoldandó egyenlőtlenség:

Megkeressük a számláló zérushelyét: ebből , a nevező zérushelyét: ebből .

Ezek a zérushelyek 3 részre osztják a teljes valós számtartományt, így táblázattal vizsgálhatjuk az előjel viszonyokat:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

A kért feltétel, tehát, hogy a tört negatív legyen, ez teljesül: tartományon. Ebből a nyitott intervallumból választott tetszőleges valós „” érték esetén, az egyenlet megoldása negatív.

Teszteljük, legyen pl. mert vele könnyű számolni. Helyettesítsünk az eredetileg megadott egyenletbe:

Szorozzunk a nevezőben lévő -vel:

Rendezés után, ebből kapjuk az értéket, amely valóban negatív előjelű megoldást ad „”-re.

Megjegyzés: Helyenként előfordult a bonyolítási szándék, tehát az, hogy mindenképp másodfokúra akarták kihozni a megoldandó egyenletet. Nem lehetetlen, csak indokolatlan! Valamely elsőfokú egyenletből másodfokút készíthetünk abban az esetben, ha szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát „”-el, de ekkor mi magunk hozunk be egy hamis gyököt (konkrétan az értéket), amelyet a végén ki kell zárjunk. (Ha másért nem, akkor azért mert nem pozitív és nem negatív.)

Elősimeret: A második feladat egyismeretlenes másodfokú paraméteres egyenlet, amelynek akkor vannak megoldásai (tehát vagy 2db egybeeső vagy 2db különböző gyöke), ha a gyökjel alatti mennyiség nulla vagy pozitív, tehát együttesen vizsgálva, akkor vannak megoldásai (így többesszámban), ha a diszkrimináns nemnegatív. Ezután kell majd külön vizsgálni azt, hogy ezek a gyökök legyenek pozitív előjelűek, ezt tehetjük meg a Viéte formulákkal.

2.Feladat: Határozza meg azon paraméterértékeket, amelyekre az egyenlet mindkettő megoldása pozitív legyen!

Együtthatók:

Megjegyzés: érdemes az együtthatókat abban a formában kezelni, ahogyan azt eredetileg megadták!

A diszkrimináns tétel értelmében ebből

Mivel tehát

Zárójelet bontunk:

Elvégezve a lehetséges műveleteket:

Összevonunk:

Felhasználjuk, hogy a megoldandó egyenlőtlenség bal oldalán minden tag tartalmazza a „” változót legalább második hatványon, így közvetlen kiemeléssel szorzattá alakítunk:

Mivel a zárójel előtti mennyiség bármilyen valós szám/valós mennyiség esetén nemnegatív, így a teljes szorzat akkor lesz nemnegatív, ha a zárójelen belüli összegzés is nemnegatív, tehát egyenlőtlenségre redukálunk (Ennek gyökei: ). Meglehet, hogy ezután táblázatos módszert alkalmazunk, de egyszerűbben is lekövethetjük, hiszen ez egy „”-ben másodfokú kifejezés, amely a pozitív előjelű főegyütthatója miatt felfelé nyíló parabola, tehát a kisebb gyöktől kisebb vagy a nagyobb gyöktől nagyobb valós számok esetén lesz nemnegatív (és a gyökei közötti tartományon negatív). Tehát ennek az egyenlőtlenségnek megoldása:

Ugyanez a feltétel jelenti azt is, hogy ezek azok a számok, amelyekre az eredetileg megadott másodfokú egyenletnek 2db (nem feltétlenül különböző) megoldása van.

Ezután áttérhetünk annak vizsgálatára, hogy ezek a gyökök legyenek egyidejűleg pozitív előjelűek.

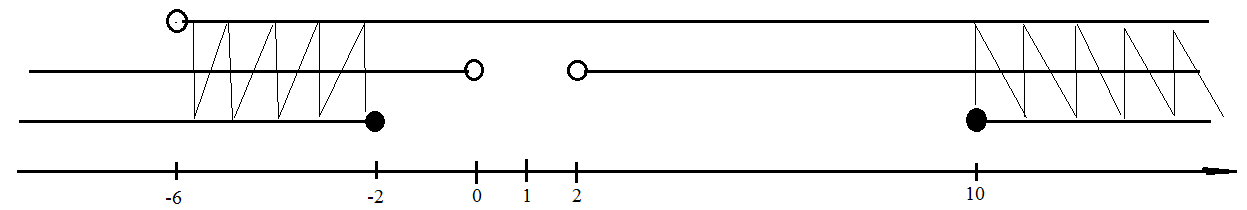
Ezt a Viéte formulákkal biztosíthatjuk, ha felhasználjuk, hogy pozitív mennyiségek összege is pozitív valamint szorzatuk is pozitív

1.feltétel: . Ezt a hiányos másodfokú egyenlőtlenséget megoldhatjuk megoldóképlettel is vagy egyszerűen szorzattá alakítással: . Zérushelyei illetve

Ez, szintén egy pozitív előjelű főegyütthatóval rendelkező másodfokú polinom, így grafikonja felfelé nyíló parabola, amely a kisebb gyöktől kisebb vagy a nagyobb gyöktől nagyobb valós számok esetén lesz pozitív, így

2.feltétel: . Ezt a hiányos harmadfokú egyenlőtlenséget eleve szorzattá alakítással kezdjük megoldani, tehát . Ismételten használjuk ki, hogy a zárójel előtti négyzetes szorzótényező bármilyen valós szám/valós mennyiség esetén nemnegatív, így a teljes szorzat akkor lesz pozitív, ha a zárójelen belüli összeg pozitív, így feltételből kapjuk: .

Na, mindezeket a feltételeket vizsgáljuk együttesen (látványosan a számegyenesen) és keressük a közös részt:



Tehát, azok a valós számok, amelyekre a megadott másodfokú egyenletnek létezik 2db (nem feltétlenül különböző) megoldása, továbbá, ezek a gyökök egyidejűleg pozitív előjelűek: .

Teszteljük, legyen pl. . Helyettesítsünk az eredetileg megadott egyenletbe:

Elvégezve a lehetséges műveleteket, kapjuk:

Leolvassuk az együtthatókat, helyettesítünk a megoldóképletbe: (ez kísértetisesen egybeesik a töri átlagoddal) valamint . Valóban 2db pozitív gyököt kaptunk.

Megjegyzés: azonban óva intenék mindenkit attól a megoldási módszertől, hogy tesztelgetéssel keresgél olyan értékeket, amelyek 2db pozitív gyököt eredményeznek, hiszen épp a cél, hogy megtaláljuk azokat a tartományokat, ahol teljesülnek a feltételek. A „tegyükfelhogy ” kezdeményezéssel pedig csak megtalálunk néhányat és kizárunk néhányat, de nem derül ki, honnantól meddig tartanak azok a számok, amelyekre tényleg minden feltétel igaz.

Előismeret: A harmadik feladat egy, a nevezőjében változót tartalmazó kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer.

3.Feladat: Oldja meg determinánsokkal az egyenletrendszert!

A.h.:

Az ismétlődő mennyiségek miatt vezessünk be segédváltozókat, legyenek:

A segédváltozók helyettesítésével felírt egyenletrendszer:

A feladat utasítása értelmében, ezt az egyenletrendszert kell determinánsokkal megoldani:

A változók együtthatóiból felírható determináns és annak értéke:

Az „” változó értékének meghatározásához cseréljük „” oszlopát a jobb oldali konstansok oszlopával és így határozzuk meg a szükséges determinánst és az „” változó tényleges értékét:

A „” változó értékének meghatározásához cseréljük „” oszlopát a jobb oldali konstansok oszlopával és így határozzuk meg a szükséges determinánst és „” változó tényleges értékét:

Mivel ezek még csak a segédváltózók értékei, így most visszahelyettesítünk oda, amely kifejezések helyére behoztuk azokat, tehát amelyből reciprokképzés után adódik, illetve amelyből kapunk.

Ellenőrzés!

Megjegyzés: A dolgozatokban (szerencsére kevés helyen, de) láttam olyat, aki eleve reciprokképzéssel szándékozott szabadulni a bal oldali törtes alakoktól. Okulásként megmutatnám, milyen problémát okoz mindez.

Vegyük a megadott egyenletrendszer mindkét összefüggésének reciprokát:

Mivel a bal oldalak kéttagú összegzések és nem zárt tört alakok(!), így reciprokképzés után ezt kapjuk:

Ez pedig nemhogy egyszerűbbé, hanem sokkal-sokkal bonyolultabbá teszi a dolgot. Az, amire a „költő gondol ilyenkor”, tehát a reciprokképzés hatékonysága, abban az esetben mutatkozik, ha előbb a megadott összefüggések bal oldalain közös nevezőre hozással elérjük a zárt tört alakot, tehát:

Ezeknek, ha vesszük reciprokait, akkor kapjuk:

Amelyből látnod kell, hogy semennyivel sem vagyunk előrébb.

Abban az esetben, ha előbb közös nevezőre hozunk, tehát elérjük

alakot, majd szorozzuk az egyenleteket a bal oldali nevezőkkel, akkor kapjuk:

Ezzel pedig az a probléma, hogy mivel a jobb oldalak nem független konstansok, így a determinánsos megoldási módszer NEM alkalmazható, mert a jobb oldalak másodfokú tagok. (Szomiszmájli.)

Persze jelenlegi ismereteid alapján (mert fekete öves megoldóképlet alkalmazó vagy), így meg tudod oldani a kapott egyenletrendszert, csak akkor behelyettesítő módszerrel előbb egy következmény-egyenletet kell készítened és utána vezeted vissza egy másodfokú egyenletre.

Előismeret: A nevezőjében változót tartalmazó törtes kifejezés nevezőjét, lehetséges racionális gyökök keresésével szorzattá alakítjuk, polinom osztást végzünk, majd ténylegesen résztörtekre bontunk.

4.Feladat: Bontsa parciális törtek összegzésére a megadott algebrai törtet!

A.h.:

A feltételezett racionális gyökök számlálóit a (csökkenő hatvány szerint rendezett) polinom független konstansának,

-nek előjeles(!) osztói adják: .

A feltételezett racionális gyökök nevezőit a (csökkenő hatvány szerint rendezett) polinom főegyütthatójának,

-nek osztói adják: .

Így a lehetséges racionális gyökök: .

Ezeket tesztelhetjük a legegyszerűbben a Horner-eljárással. A Horner-féle táblázat minden esetben 3 sorból és valahány oszlopból áll. A valahány oszlop az a polinom fokszámától (vagy benne lévő tagok darabszámától) függ.

Ha a fokszámhoz viszonyítjuk, akkor azt a megállapítást tesszük: a polinom fokszáma plusz 1db a szükséges oszlopok száma (mert van benne független konstans is!). Ha a tagok darabszámához viszonyítunk, persze ekkor is figyelnünk kell arra, hogy ha valamely fokszámú tag hiányzik belőle, akkor azt 0db-nak kell tekintenünk. Tehát esetünkben a felírható 3soros táblázat kezdetben így néz ki:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ezután az első oszlopról mondhatjuk, hogy annak második sorába értéktelen karakter kerül és harmadik sorába az eredetileg megadott polinom főegyütthatója, tehát:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ezután rátérhetünk a tényleges tesztelésre, válasszuk pl. az tesztelendő értéket, amely az elsőfokú polinomot jelenti. A második sor elemeit balról jobbra haladva töltjük ki, mégpedig: a harmadik sor aktuális elemét szorozzuk a tesztelendő értékkel, ez kerül a második sor következő elemének helyére, majd a harmadik sor aktuális elemét az aktuális oszlop összegzéseként kapjuk, tehát:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ezt folytatva, a harmadik oszlop:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ezt folytatva, a negyedik oszlop:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Az utolsó oszlop:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ebből vonjuk le a megfelelő következtetést: Ha a táblázat jobb alsó értéke konkrétan 0, akkor a tesztelt érték gyöke a polinomnak, ha pedig nem0, akkor nem gyöke a polinomnak. Mivel esetünkben 0érték jelent meg a jobb alsó cellában, tehát gyöke a polinomnak, így az eredetileg megadott polinomot átírhatjuk szorzat alakra. A felírt szorzat alak első tényezője a tesztelt értéket jelentő elsőfokú polinom, másik szorzótényezője a Horner-féle táblázat harmadik sorában lévő együtthatókkal felírható 1-gyel kisebb fokszámú polinom, esetünkben:

Megjegyzés: reméltem megfogadják azt a tanácsomat, hogy a következő lehetséges racionális gyök tesztelésénél, már elegendő az előzőleg kapott visszamaradó harmadfokú polinomra elvégezni a tesztelést és indokolatlan, ha visszatérünk az eredeti negyedfokúra. Abban az esetben, ha tesztelésnél mindig visszatérünk az eredeti negyedfokú polinomra, akkor amely buktatóra kihegyeztem a feladatot, éppen beleszaladsz. Tehát a lehetséges racionális gyökök közül megtalálod, hogy ennek a negyedfokú polinomnak gyöke és kizárod, tehát nem gyöke

Igenám, de ha a polinom negyedfokú, viszont csak 3db gyököt találtál, akkor abból azt a következtetést kell levonnod, hogy valamely gyök ismétlődik, tehát többszörös gyök. Azt, hogy melyik az ismétlődő, azt a Horner-eljárás ismételt alkalmazásával tudod kideríteni, amely nem lehetetlen, csak időigényes.

Na, ezért célravezető, ha már megtaláltuk a polinom valamely gyökét, akkor utána már csak a visszamaradó (esetünkben) harmadfokú polinom tesztelésével folytassuk a Horner-eljárást. Tehát a következő tesztelendő érték amely az elsőfokú polinomot jelenti, végezzük a Horner-eljárást, de ésszerűen csak a harmadfokúra:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Mivel a táblázat jobb alsó cellájában ismét 0 értéket kaptunk, akkor ez azt jelenti, hogy ennek a visszamaradó harmadfokú (és az eredetinek is) gyöke az érték, vagyis az előzőleg kapott szorzatalakot tovább bontjuk úgy, hogy abban megjelenik az szorzótényező és a visszamaradó másodfokú polinom együtthatói a Horner-táblázat harmadik sorából olvassuk ki, tehát esetünkben:

Ez pedig mivel már csak másodfokú, rázúdúlhatsz a megoldóképlettel vagy teljes négyzetté alakítással vagy folytathatod a Horner tesztelést és így egyértelműen kiderül, hogy az gyök lesz az ismétlődő, mert

Abban az esetben, ha az előző tesztelést nem értékre végzed, hanem pl. -re, akkor:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Mivel a jobb alsó cella 0tól különböző, így az érték kizárható, így másik lehetséges értékre tesztelsz.

Összegezve javaslatomat: Használd ki, ha már megtaláltad az egyik gyököt, akkor a további Horner-tesztelést már csak a visszamaradó 1gyel kisebb fokszámú polinomra végezd!!!

Visszatérve a megoldandó feladatra, mert ez még csak az A.h. feltételvizsgálat, a nevezőt szorzattá alakítod:

Ezzel lefutod a tisztelet-kört, vagyis ahhoz, hogy a teljes algebrai tört értelmezett legyen .

Folytatva a megoldást: Mivel a megadott algebrai tört számlálója, a nevezőhöz képest nagyobb fokszámmal rendelkező polinomot tartalmaz, így polinom osztással folytatjuk. A polinomok osztásánál kell azt a kiegészítést tenned, hogy a csökkenő hatvány szerint rendezett polinomok esetleges hiányzó tagjait 0 szorzótényezővel ellátva beilleszted, esetünkben:

Polinomok osztásánál az osztandó polinom legnagyobb fokszámú tagját osztjuk le az osztó polinom legnagyobb fokszámú tagjával, esetünkben: . Ez a mennyiség lesz a hányados polinom első tagja.

Ezzel szorozzuk vissza az osztó polinom minden egyes tagját és írjuk be az osztandó polinom velük megegyező fokszámú tagjai alá, esetünkben:

Mivel célunk az, hogy az osztandó polinomnak csökkentsük fokszámát, ezért az egynemű tagokat az előjelek figyelembe vételével KIVONÁSSAL ejtjük ki, esetünkben:

Mivel a visszamaradó polinom fokszáma még legalább annyi, mint az osztó polinom fokszáma, így az eljárást ismételjük. A visszamaradó polinom legnagyobb fokszámú tagját leosztjuk az osztó polinom legnagyobb fokszámú tagjával, esetünkben: . Ez lesz a hányados polinom következő tagja:

Ezzel a taggal visszaszorozzuk az osztó polinom minden egyes tagját és írjuk be az osztandó polinom velük megegyező fokszámú tagjai alá, esetünkben:

Mivel célunk az, hogy az osztandó polinomnak csökkentsük fokszámát, ezért az egynemű tagokat az előjelek figyelembe vételével KIVONÁSSAL ejtjük ki, esetünkben:

Mivel a visszamaradó polinom már kisebb fokszámú, mint az osztó polinom, így a polinom osztás eljárása véget ért.

Ezután felhasználjuk:

Esetünkben:

Ezután a törtre alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét, amelynél felhasználjuk az A.h. feltételvizsgálatnál megállapított szorzatalakot:

A parciális törtekre bontásnál felhasználjuk, ha a nevezőnek vannak valós gyökei, akkor olyan résztörtekben gondolkodunk, amelyek nevezői a szorzatalakú nevező egyes szorzótényezői, számlálói pedig független konstans-értékek.

Esetünkben:

Megjegyzés: az olyan esetben (mint most is), amikor a nevezőnek vannak többszörös gyökei, akkor a többszörös gyökök minden lehetséges hatványú tagját feltételeznünk kell a résztörteknél. Pl.:

Visszatérve a dolgozat feladatra. Az általunk feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

Zárójelet bontunk:

Ezután átcsoportosítjuk a tagokat:

Közvetlen kiemeléssel szorzattá alakítunk:

Az együtthatók egyeztetésének elve alapján, az ugyanazon fokszámú tagok konstans-szorzóinak egyenlőnek kell lennie, így a megoldandó egyenletrendszer:

Felírjuk az együtthatók determinánsát, amelynél a hiányzó tagokat 0-val egészítjük ki:

Kiválasztjuk az első sor első elemét, amelynek felhasználásával kinullázzuk az első oszlop további elemeit, ehhez csak a második és negyedik soron kell műveleteket végeznünk:

A kijelölt műveletek elvégzése után:

Ezután a második sor második elemének felhasználásával kinullázzuk a második oszlop további elemeit, ehhez az elvégzendő műveletek:

A kijelölt műveletek elvégzése után:

Ezután a harmadik sor harmadik elemének felhasználásával kinullázzuk a harmadik oszlop további elemeit, ehhez az elvégzendő műveletek:

A kijelölt műveletek elvégzése után:

Innentől pedig visszafejthetők az értékek ebből adódik, ezután ebből adódik, ezután ebből adódik, végül ebből adódik.

Tehát:

A teljes feladatra vonatkozóan pedig:

Ellenőrzéskor közös nevezőre hozunk:

Zárójelet bontunk:

A számlálóban összevonjuk az egynemű tagokat:

Megjegyzés: mivel a dolgozatokban sokan el sem jutottak odáig, hogy parciális törtekre bontás illetve Gauss elimináció (viszont annak ismeretét is bizonygatnotok kell), ezért a javító feladatsort átalakítom.

Egyrészt, egyszerűsödik a 4.Feladat nevezője, hogy kevesebb időt vegyen el a Horner tesztelés, viszont mert sok a tévesztés lehetősége, így a Gauss eliminációs megoldás már a 3.Feladatban külön b) alpontként jelenik meg.

Pl.: b) Oldja meg Gauss eliminációval az egyenletrendszert!

A 4.Feladat pedig nagyjából így néz majd ki:

4.Feladat: Bontsa parciális törtek összegzésére a megadott algebrai törtet!